دالة اللوغاريتم

I- دالة اللوغاريتم النبيبري

1- تذكير - نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I

- نعلم أن لكل r من $\mathbb{Q}-\{-1\}$ الدالة $x \to x^r$ تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$ هي $x \to \frac{x^{r+1}}{r+1}+k$

حيث k عدد حقيقي ثابت

*- في الحالة التي تكون r=-1 نحصل على الدالة $x \to \frac{1}{x}$ المتصلة على $]0;+\infty[$ ومنه تقبل دوال أصلية

وبالتالي الدالة $x \to \frac{1}{x}$ تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

2- تعريف

الدالة الأصلية لدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيبري

و يرمز لها بالرمز ln أو Log

$$\begin{cases} x \succ 0 \\ f'(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)=\ln(x) \\ f(1)=0 \end{cases}$$

3- خاصيات

أ- خاصيات

*- مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0;+\infty[$ ln(1)=0

*- الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$

*- الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$

*- الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

نتائج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$$

ملاحظة

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x \succ 0 \Leftrightarrow x \succ 1$$

$$\ln x \prec 0 \Leftrightarrow 0 \prec x \prec 1$$

تمرين 1- حدد مجموعة تعريف الدالتين $f : x \to \ln(x-1)+\ln(4-x)$ $\quad g : x \to \ln(x^2-3x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $\ln(x^2+2x)=0$ $\quad \ln(x^2-3)=\ln(2x)$

3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $\ln(x^2-x-2)\prec 0$ $\quad \ln(x^2-2x)\le \ln(x)$

ب- خاصية أساسية

نشاط ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا و F دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=\ln(ax)$

1- بين أن $F'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ و استنتج ان F دالة أصلية لدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

2- بين أن $F(x)=\ln(ax)=\ln a+\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$ ثم استنتج $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

الجواب

1- لدينا $F(x)=\ln\circ u(x)$ حيث $u(x)=ax$

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\qquad F'(x)=u'(x)\times(\ln)'(u(x))=a\cdot\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$$

و منه F دالة أصلية لدالة $x\to\frac{1}{x}$ على $\left]0;+\infty\right[$

2- لدينا F و $x\to\ln x$ دالتان أصليتان لدالة $x\to\frac{1}{x}$ على $\left]0;+\infty\right[$

اذن $F(x)=k+\ln x \qquad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

لدينا $F(1)=\ln(a)$ و $F(1)=k$ و منه $k=\ln a$

إذن $F(x)=\ln(ax)=\ln a+\ln x \qquad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

بوضع $x=b$ نحصل على $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

خاصية أساسية

$$\forall(a;b)\in\left(\left]0;+\infty\right[\right)^2\qquad \ln(ab)=\ln a+\ln b$$

ج- خاصيات

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\qquad \ln\frac{1}{x}=-\ln x$$

$$\forall(x;y)\in\left]0;+\infty\right[^2\qquad \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$$

$$\forall(x_1;x_2;....;x_n)\in\left]0;+\infty\right[^n\qquad \ln(x_1\times x_2\times.........\times x_n)=\ln x_1+\ln x_2+....+\ln x_n$$

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\qquad \forall r\in\mathbb{Q}^*\qquad \ln x^r=r\ln x$$

البرهان

❖ $\ln\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\ln 1\Leftrightarrow \ln x+\ln\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=-\ln x$

❖ إذا كان $r\in\mathbb{N}^*$ فان $\ln x^r=\ln(\underbrace{x\times x\times.......\times x}_{r\quad facteurs})=\underbrace{\ln x+\ln x+.......+\ln x}_{r\quad termes}=r\ln x$

إذا كان $r\in\mathbb{Z}_-^*$ فإننا نضع $r=-n$ ومنه $\ln x^r=\ln x^{-n}=\ln\frac{1}{x^n}=-\ln x^n=-n\ln x=r\ln x$

إذا كان $\frac{p}{q}=r$ / $p\in\mathbb{Z}^*$ $q\in\mathbb{N}^*$ نعلم أن $y=x^{\frac{p}{q}}\Leftrightarrow x^p=y^q$

و منه $\ln x^p=\ln y^q$ و بالتالي $p\ln x=q\ln y$ أي $\ln y=\frac{p}{q}\ln x$ اذن $\ln x^{\frac{p}{q}}=\frac{p}{q}\ln x$

أي $\ln x^r=r\ln x$

حالة خاصة $\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \qquad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

تمرين هل الدالتان f و g متساويتين في الحالتين التاليتين

(a $g(x)=2\ln|x-1|$ $\qquad f(x)=\ln(x-1)^2$

(b $g(x)=\ln x+\ln(x-1)$ $\qquad f(x)=\ln x(x-1)$

تمرين (1 أحسب $\ln\sqrt{\sqrt{2}+1}+\ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$

(2 أحسب قيمة مقربة لـ $\ln\sqrt{6}$ و $\ln\frac{2}{9}$ اذا علمت أن $\ln 3\simeq 1,1$ $\qquad \ln 2\simeq 0,7$

4- دراسة دالة ln

a) دالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

b) مبرهنة1 (نقبل) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة2 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

البرهان نضع $x = \frac{1}{t}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\ln t = -\infty$

c) العدد e

لدينا الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ و منه المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e = 1$

نقبل أن e ليس عددا جذريا و قيمته المقربة هي $e \simeq 2,71828$

d) جدول تغيرات الدالة ln

x	0		1		e		$+\infty$
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

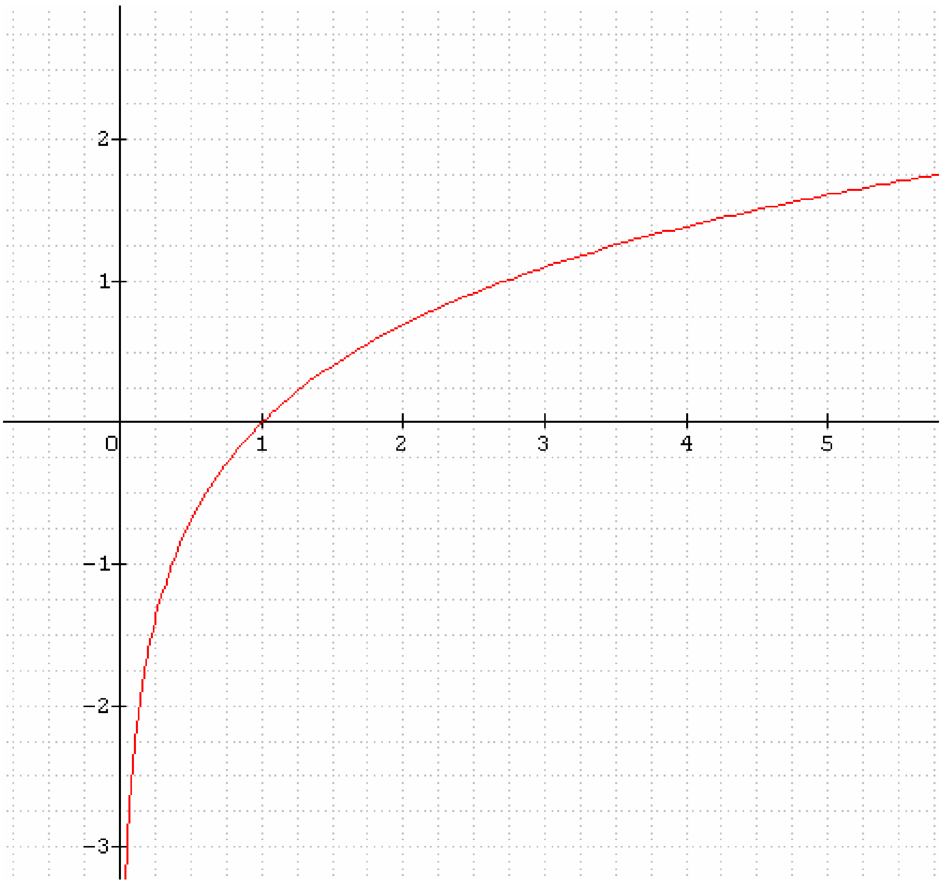
e) الفروع اللانهائية بما أن $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ فان محور الاراتيب مقارب للمنحنى الممثل الدالة ln

مبرهنة $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

اذن المنحنى الممثل لدالة ln يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

f) دراسة التقعر $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن منحنى الدالة ln مقعر

g) التمثيل المبياني



منحنى الدالة ln

h) نهايات هامة أخرى

خاصية

$\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$ $\quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ $\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ $\quad \lim_{x\to0^+} x^n\ln x=0$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

تمرين حدد $\lim_{x\to+\infty} x-\ln x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$ $\quad \lim_{x\to0^-} x\ln\left(x^2-x\right)$

5 – مشتقة الدالة اللوغاريتمية

أ- مبرهنة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال I

$$\forall x\in I \qquad \left(\ln\left|u(x)\right|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان u لا تنعدم علىI و منه u إما موجبة قطعا على I أو سالبة قطعا على I

اذا كانت u موجبة قطعا على I فان $f(x)=\ln u(x)$ ومنه $\frac{u'(x)}{u(x)}=f'(x)=u'(x)\ln' u(x)$ $\quad \forall x\in I$

اذا كانت u سالبة قطعا على I فان $f(x)=\ln(-u(x))$ ومنه

$$\forall x\in I \qquad f'(x)=-u'(x)\ln'(-u(x))=\frac{-u'(x)}{-u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

تمرين حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب مشتقتها في الحالتين التاليتين

(a $f(x)=\ln\left|x^2-4\right|$ $\qquad$ (b $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)$

ب- تعريف

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

ج- نتيجة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدوال الأصلية لدالة $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال $x\to\ln\left|u(x)\right|+c$ حيث c عدد ثابت

تمرين1 أوجد دالة أصلية لدالة f على المجال I في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x} \\ I=]2;+\infty[\end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)=\tan(x) \\ I=\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x+1} \\ I=]-1;+\infty[\end{cases}$$

تمرين2 أحسب الدالة المشتقة لدالة f على $]-1;+\infty[$ حيث $f(x)=\frac{\sqrt{x^3+1}}{(x+2)^2}$

II- دالة اللوغاريتم للأساس a

1- تعريف

a عدد حقيقي موجب قطعا و مخالف للعدد 1

الدالة $x\to\frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $]0;+\infty[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز Log_a

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad Log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$$

ملاحظات

*- دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e $\quad Log_e(x)=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$ $\quad \forall x\in]0;+\infty[$

*- $Log_a\left(a^r\right)=r$ $\quad Log_a(a)=1$ $\quad \forall r\in\mathbb{Q}$ $\quad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

2- خاصيات

بما أن لكل x من $]0;+\infty[$ $\quad Log_a(x) = k\ln x$ حيث k عدد حقيقي ثابت فان الدالة Log_a

تحقق جميع الخاصيات التي تحققها الدالة $\ln$

$$\forall(x;y)\in\left(]0;+\infty[\right)^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad Log_a(xy) = Log_a(x)+Log_a(y)$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x)-Log_a(y) \quad ; \quad Log_a(x^r) = rLog_a(x)$$

3- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

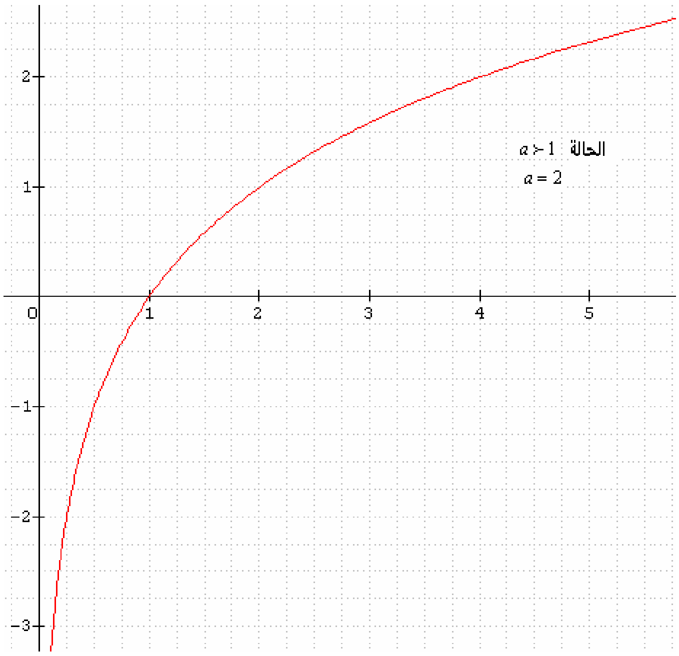
$$\forall x\in\,]0;+\infty[\qquad Log_a{}'(x) = \frac{1}{x\ln a}$$

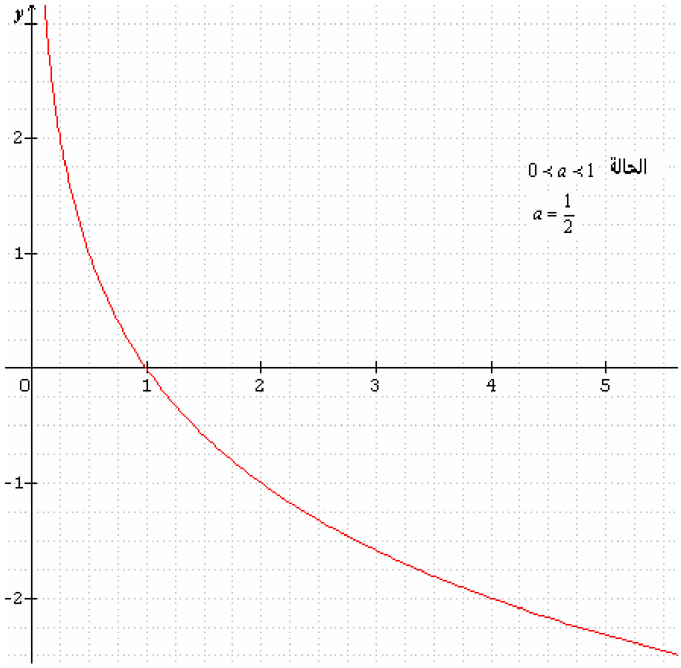
*- اذا كان $0\prec a\prec 1$ فان $\ln a\prec 0$ و منه $Log_a{}'\prec 0$ $\quad \forall x\in\,]0;+\infty[$ اذن Log_a تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} Log_a x = +\infty$$

*- اذا كان $a\succ 1$ فان $\ln a\succ 0$ و منه $Log_a{}'\succ 0$ $\quad \forall x\in\,]0;+\infty[$ اذن Log_a تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} Log_a x = -\infty$$





4- حالة خاصة اللوغاريتم العشري

تعريف

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ $\log$

$$\forall x\in\,]0;+\infty[\qquad \log x = Log_{10}x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

*- اذا وضعنا $M = \frac{1}{\ln 10}$ فاننا نحصل على $\log x = M\ln x$ $\qquad \forall x\in\,]0;+\infty[\qquad (M\simeq 0{,}434)$

*- $\qquad \log 10^m = m \qquad \forall m\in\mathbb{Z}$

تمرين 1- أحسب $\log 10000$ $\quad \log 0{,}01$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\quad \log(x-1)+\log(x+3) = 2$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x+y = 65 \\ \log x+\log y = 3 \end{cases}$